

Série n°7 : Fonction logarithme népérien (TS2)**EXERCICE :1**

1) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln x^2; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x + 3 - 4 \ln x; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \ln|x|; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x)}{x-1};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow e} \frac{x \ln x - e}{x-e}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x} \ln\left(1 + \frac{x}{x+2}\right) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - 1.$$

2) Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de f en x_0 :

a) $f(x) = \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 2x}$ $x_0 = 0$

b) $f(x) = \frac{\ln(x^2 - \frac{5}{2}x + 1)}{x}$ $x_0 = 0$

c) $f(x) = \frac{(\ln x)^4}{x^2}$ $x_0 = +\infty$

d) $f(x) = x^4 \ln x$ $x_0 = 0$

e) $f(x) = \frac{\ln(1+3x)}{x}$ $x_0 = 0$

f) $f(x) = \frac{3x-2\ln x}{x+\ln x}$ $x_0 = +\infty$

g) $f(x) = \ln(\cos x) \ln x$ $x_0 = 0^+$

h) $f(x) = x - \sqrt{x} \ln x$ $x_0 = 0$

i) $f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{4x}$ $x_0 = 0$

j) $f(x) = \frac{\tan x}{\ln(1+2x)}$ $x_0 = 0$

k) $f(x) = x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ $x_0 = +\infty$

l) $f(x) = \frac{x^2}{x-1} - \ln x$ $x_0 = +\infty$

m) $f(x) = \tan x \ln x$ $x_0 = 0^+$

n) $f(x) = \frac{\ln(1+\sin x)}{x}$ $x_0 = 0$

o) $f(x) = x(\ln x - 1)$ $x_0 = +\infty$ et $x_0 = 0^+$

p) $f(x) = \frac{(x-1)\ln x}{x}$ $x_0 = +\infty$ et $x_0 = 0^+$

EXERCICE : 2

1) Dans chacun des cas suivants déterminer une primitive de f sur I :

$$a) f(x) = \frac{x}{x^2-1} \quad I =]-1; 1[\quad b) f(x) = \frac{1}{x \ln x} \quad I =]1; +\infty[\quad e) f(x) = \frac{-4x-2}{x^2+x+1} \quad I = \mathbb{R}$$

2) Soit $f(x) = \frac{3x+1}{(2x+1)^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

a) Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \neq -\frac{1}{2}$; $f(x) = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{(2x+1)^2}$.

b) Déterminer la primitive F de f sur $I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$ vérifiant $F(0) = 1$.

3) Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f sur I :

$$f(x) = \frac{2}{2+3x} \text{ et } I =]-\frac{2}{3}; +\infty[; \quad f(x) = \frac{\ln^3 x}{x} \text{ et } I =]0; +\infty[; \quad f(x) = \frac{1}{x \ln x} \text{ et } I =]0; 1[$$

4) Trouver les réels a, b et c tels que $\frac{2x^2-5x+6}{(x-1)^2} = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$. En déduire une primitive sur $]1; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^2-5x+6}{(x-1)^2}$.

5) $f(x) = \frac{x+\ln|1-x|}{1-x}$.

a) Montrer que si $x > 1$ alors $f(x) = -1 - \frac{1}{x-1} - \frac{\ln(x-1)}{x-1}$.

b) En déduire une primitive de f sur $]1; +\infty[$.

EXERCICE : 3

On considère une fonction f . La droite $(\Delta): y = 3x + 1$ est la tangente à C_f au point d'abscisse 2.

1) a) Déterminer $f'(2)$ puis calculer $f(2)$.

b) Sachant que $f(x) = a \ln\left(\frac{x}{2}\right) + b$, déterminer a et b .

2) Soit g telle que $g(x) = f(x^2 + 1)$. Soit P le point de C_g d'abscisse 1.

a) Montrer que la tangente (Δ') à C_g en P a pour coefficient directeur 6.

b) Déterminer une équation de (Δ') .

c) Montrer que $g(x) = 6 \ln\left(\frac{x^2+1}{2}\right) + 7$

3) Donner les coordonnées du point d'intersection de (Δ) et (Δ') .

EXERCICE : 4

Partie A : Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln x$

1) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variations.

a) Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$ et que $0,65 < \alpha < 0,66$.

b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B : Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 - x + \frac{1+\ln x}{x}$.

(C_f) est sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis en donner une interprétation graphique.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

c) Montrer que (C_f) admet une asymptote oblique (D) en $+\infty$ et étudier la position de (C_f) par rapport à (D) .

2) a) Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[$ $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$

b) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations.

3) Montrer que $f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$.

4) Calculer les coordonnées du point A de (C_f) où la tangente est parallèle à (D) . Donner une équation de cette tangente (T) .

5) Tracer (D) , (T) et (C_f) .

EXERCICE : 5**Partie A :**

Soit la fonction g définie par $g(x) = 1 - x(\ln x)^2$

- 1) a) Déterminer le domaine de définition de g puis calculer les limites aux bornes.
 b) Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[; g'(x) = (-\ln x - 2)(\ln x)$ puis étudier son signe.
 c) Dresser le tableau de variations de g .
- 2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1; +\infty[$.
 b) Vérifier que $2 < \alpha < 3$.
 c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x - 1}{\ln x} - x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Soit C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) a) Déterminer l'ensemble de définition de f .
 b) Montrer que f est continue en 0.
 c) Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter géométriquement le résultat.
- 2) a) Calculer les limites aux bornes.
 b) Montrer que la droite $(D): y = -x + 1$ est une asymptote oblique à C_f .
 c) Etudier la position relative entre C_f et (D)
- 3) a) Montrer que pour tout réel $x \in D_f \setminus \{0\}; f'(x) = \frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$
 b) En déduire le tableau de variations de f .
 c) Montrer que $f(\alpha) = 1 - \alpha - \sqrt{\alpha}$.
- 4) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I =]0; 1[$.
 a) Montrer que h réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser.
 b) Calculer $h(e^{-1})$ puis $(h^{-1})'(2 - e^{-1})$.
 c) Construire C_f et $C_{h^{-1}}$ dans le même repère.

EXERCICE : 6**PARTIE A**

Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2 + 1)$

- 1) Calculer $g(0)$ et la limite de g en $+\infty$
- 2) Vérifier que $g'(x) = \frac{2x(-x^2+1)}{(x^2+1)^2}$ puis dresser le tableau de variation de g sur $[0 ; +\infty[$
- 3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$ et vérifier que $1,9 < \alpha < 2$
- 4) Préciser le signe de g sur $[0 ; +\infty[$

PARTIE B

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x^2+1)}{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{x - \ln(1-x)}{1-x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

- 1) Justifier que $D_f = \mathbb{R}$, calculer les limites de f aux bornes de D_f puis interpréter graphiquement les résultats
- 2) a) Etudier la continuité de f en 0
b) Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement les résultats
- 3) a) Pour $x > 0$, montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
b) Pour $x < 0$, montrer que $f'(x) = \frac{2 - \ln(1-x)}{(1-x)^2}$
c) Donner le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f
d) Montrer que $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$
- 4) Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé d'unité graphique 1cm.
On prendra $\alpha \approx 1,95$ et $f(\alpha) \approx 0,81$

EXERCICE : 7

Partie A : Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 1 + x + \ln x$.

- a) Dresser le tableau de variation de g
- b) Montrer qu'il existe un unique réel α solution de $g(x) = 0$. Vérifier que $0,2 < \alpha < 0,3$
- c) En déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$
- d) Etablir la relation $\ln \alpha = -1 - \alpha$.

Partie B : Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ et C_f sa courbe.

- a) Montrer que f est continue en 0, puis sur $]0; +\infty[$
- b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats
- c) Etudier la branche infinie en $+\infty$ à C_f
- d) Montrer que $\forall x > 0, f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout $x > 0$
- e) Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$
- f) Dresser le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$
- g) Préciser le point d'intersection de C_f avec l'axe $(x'x)$ sur $]0; +\infty[$
- h) Tracer C_f dans un repère orthonormé

EXERCICE : 8

Partie A : Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$.

1. Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$
2. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variations.
3. En déduire le signe de $g(x)$.

Partie B : Soit f la fonction définie par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x+1} + \ln(x+1) & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ f(x) = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On note $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. a. Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.
b. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Interpréter graphiquement le résultat.
3. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats.
4. a. Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$.
b. Calculer $f'(x)$ sur l'autre intervalle.
5. Dresser le tableau de variations de f .
6. Construire $(\mathcal{C}f)$ (on prend unité 2cm)

Partie C : Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0; +\infty[$.

1. Montrer que h réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser.
2. Calculer $h(1)$. h^{-1} est-elle dérivable en $\ln 2$? Si oui calculer $(h^{-1})'(\ln 2)$.
3. Etudier la dérivabilité de h^{-1} sur J .
4. Montrer que la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = -\frac{1}{2} \ln(x+1) + \frac{1}{2} x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{1}{2} x$ est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

GTS