

Série n°1 : Limites et continuité (TS2)

EXERCICE :1

1) Déterminer, si elles existent, les limites suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x+3}}{x^2 - 4} \right); \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x^2 - x - 6}} \right); \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt{x - 3}}; \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{-x-2} + 1}{\sqrt[3]{x-7} + 2}$$

2) Déterminer, si elles existent, les limites suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \sin(2x)}{1 - \cos x}; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x + 2 \tan x - 3}{\sin x - \cos x}; \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x - \tan x}{x^3} \right); \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos(2x) + 1}{2 \cos x - 1}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos x)}{\sin(x^2)}$$

3) Déterminer, si elles existent, les limites suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{4x^2 + 3x - 7} - 2x^2; \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x+3}-2} \right); \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x+\sqrt{x^2+1}}{x} \right); \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{\sqrt{x^2-x-2}-x+1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sin \frac{1}{x} + 1 - \cos \frac{1}{x} \right); \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x+\sin x}{2-\sin x} \right); \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x-\sqrt{|x|}}{3|x|-2} \right)$$

4) Déterminer les réels a et b pour que la droite d'équation $y = ax + b$ soit une asymptote à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + 4} - \frac{x}{\sqrt{2}}$

5) Etudier les branches infinies de la représentation graphique de la fonction f

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ x + \sqrt{x^2 + x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}; \quad b) f(x) = \begin{cases} x \sqrt{\left| \frac{x+1}{x} \right|} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^3-x^2}{x^2+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

6) Soit la fonction g définie dans IR par : $g(x) = \frac{x^3+2x^2+9x+2}{x^2+1}$. On note (C_g) sa représentation graphique.

a. Déterminer les réels a, b et c tels que : $g(x) = ax+b+\frac{cx}{x^2+1}$

b. Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de g.

c. Démontrer que la droite d'équation (D) : $y = x+2$ est une asymptote à la courbe (C_g) .

d. Préciser la position relative de (C_g) et de (D).

EXERCICE :2

En utilisant le théorème sur la limite d'une fonction composée, étudier la limite de la fonction f en l'endroit indiqué.

$$1) f(x) = \sqrt{\frac{2x^2}{1-x}} ; \text{ en } -\infty \quad 2) f(x) = \sin \frac{1}{\sqrt{x}} ; \text{ en } +\infty \quad 3) f(x) = \left(x - \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right)^3 ; \text{ en } +\infty$$

$$4) f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-5}} ; \text{ en } 5 \quad 5) f(x) = \cos^2 \left(\pi \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right) ; \text{ en } +\infty$$

EXERCICE :3

PARTIE A :

Etudier la continuité de chacune des fonctions f au point a fixé.

$$1) \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad a = 0. \quad 2) \begin{cases} f(x) = x+1 \text{ si } x < 0 \\ f(x) = x^2+1 \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad a = 0$$

$$3) \begin{cases} f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \sqrt{x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad a = 0$$

PARTIE B :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-27}{x-3} & \text{si } x > 3 \\ x^2+bx+3 & \text{sinon} \end{cases}$.

Trouver le réel b pour que la fonction f soit continue au point $x_0 = 3$.

PARTIE C :

$$1) \text{ Soit la fonction f définie par } f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+4}-4}{x-2}$$

a) Peut-on prolonger f par continuité en 2 ?

b) Si oui, donner son prolongement par continuité g en 2.

2) Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de définition de f et déterminer s'il existe le prolongement par continuité de cette fonction en x_0 .

$$3) \text{ a) } f(x) = \frac{x^2-3x+2}{3x^2-7x+2}, x_0 = 2 \quad \text{ b) } f(x) = \frac{x-2}{|x-2|}, x_0 = 2 \quad \text{ c) } f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}, x_0 = 0$$

EXERCICE :4

1) Soit f la fonction définie par : $f(x)=x^7+3x^5-x+2$.

Montrer que l'équation $f(x)=3$ admet au moins une solution dans $]0;1[$.

2) Montrer que l'équation $\cos \frac{\pi x}{2} - x = 0$ admet au moins une solution dans $]0;1[$

EXERCICE :5

1) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$

a. Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $I = \left[-\frac{3}{2}; -1\right[$.

b. Déterminer l'image de I par la fonction f .

c. En déduire que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution dans I .

2) Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$; déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près puis donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

a) $f(x) = -2x^3 - 7x + 4$; b) $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 3$

3) Montrer que l'équation $\sqrt{1 + \frac{1}{x}} = x$ admet au moins une solution dans $I = \left[\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

4) On considère la fonction f définie sur $] -1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$

a. Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à préciser.

b. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

GTS (GROUPE DU TRIO SCIENTIFIQUE)
(Cours en ligne 100% scientifique)
M.ALOU MBAAYE
76 173 70 74

□ Dakar, Sénégal
□ +221 78 824 46 92
✉ gtscoursenligne@gmail.com

GTS 78 824 46 92