

**Série n°6 : Similitudes directes planes (TS2)****EXERCICE : 1**

Dans chacun des cas suivants déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application  $F$  du plan dans lui-même, qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que :

- 1)  $z' = (\sqrt{3} + i)z$  ;
- 2)  $z' = (\sqrt{3} - i)z + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$
- 3)  $z' = -2z + i$  ;
- 4)  $z' = -iz + 1 - 2i$

**EXERCICE : 2**

- 1) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe vérifiant :
  - a)  $f$  a pour rapport  $k = 2$ , angle  $\theta = \frac{\pi}{4}$  et transforme  $A$  en  $B$  avec  $z_A = \sqrt{2}$  et  $z_B = 4 + i\sqrt{2}$
  - b)  $f$  a pour centre  $I(1 + i)$ , de rapport  $k = 3$  et d'angle  $\theta = -\frac{\pi}{3}$
- 2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la similitude directe  $f$  du plan telle que  $f(A) = B$  et  $f(C) = D$  dans les cas suivants :
  - a)  $z_A = i$  ;  $z_B = -4 - i$  ;  $z_C = 1 - i$  et  $z_D = -1 - 2i$
  - b)  $z_A = 3 - 2i$  ;  $z_B = -3 - 2i$  ;  $z_C = -3i$  et  $z_D = 3$

**EXERCICE : 3**

On considère les points  $A(a)$ ;  $B(b)$ ;  $C(c)$  et  $D(d)$  tels que:

$$a = 1 + i; \quad b = 1 - i; \quad c = -1 + i \text{ et } d = -1 - i$$

- 1) a) Déterminer la forme trigonométrique de  $a$  et  $c$  et déduire que  $OA = OC$   
 b) Déduire la forme trigonométrique de  $b$  et  $d$   
 c) Déduire que les points  $A$ ;  $B$ ;  $C$  et  $D$  appartiennent au même cercle ( $C$ ) en déterminant le centre et le rayon du cercle ( $C$ )
- 2) a) Montrer que  $b - a = i(c - a)$  et déduire la nature du triangle  $ABC$   
 b) Déduire que le point  $B$  est l'image du point  $C$  par la rotation  $R$  de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$   
 c) Déterminer l'image du point  $B$  par la translation  $T$  de vecteur  $\overrightarrow{AC}$   
 d) Déduire que le quadrilatère  $ABCD$  est un carré
- 3) On considère le point  $E$  d'affixe  $e = 1 + 2i$   
 a) Montrer que  $\frac{b-a}{e-a} = -2$  puis en déduire que les points  $A$ ,  $B$  et  $E$  sont alignés  
 b) Déduire que le point  $B$  est l'image du point  $E$  par l'homothétie  $h$  de centre  $A$  et de rapport  $-2$

**EXERCICE : 4**

On considère dans le plan complexe les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $-1$ ;  $3 - 2i$  et  $1 + 4i$ .

- 1) Déterminer le module et un argument de  $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ .
- 2) En déduire la nature du triangle  $ABC$
- 3) Soit  $S$  la similitude directe de centre  $A$  et qui transforme  $B$  en  $C$ .  
 a) Déterminer l'écriture complexe de  $S$ .  
 b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de  $S$ .  
 c) Déterminer l'image par  $S$  du triangle  $ABC$ .

**EXERCICE : 5**

Soit  $f$  la transformation du plan, qui à tout point  $M(x; y)$  du plan associe  $M'(x'; y')$  tel que :

$$\begin{cases} x' = x - \sqrt{3}y + 3\sqrt{3} \\ y' = \sqrt{3}x + y + \sqrt{3} \end{cases}$$

- 1) Déterminer une écriture complexe de  $f$
- 2) Donner la nature et les éléments caractéristiques de  $f$

**EXERCICE : 6**

Soit  $f$  la transformation du plan, qui à tout point  $M(z)$  du plan associe  $M'(z')$  tel que,

$$z' = (1 + i)z - 2 + 2i$$

- 1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $f$
- 2) Déterminer une écriture analytique de  $f$
- 3) Déterminer une équation de  $(D')$  image de la droite  $(D) : y = x + 3$  par  $f$
- 4) Déterminer une équation de  $(C')$  image du cercle  $(C)$  de centre  $I$  d'affixe  $z_I = i$  et de rayon  $2\sqrt{2}$

**EXERCICE : 7**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On considère les points  $A, B, I$  et  $F$  d'affixes respectives  $z_A = i$ ;  $z_B = 1 - i$ ;  $z_I = 2$  et de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$  qui, à tout point  $M(z)$  associe le point  $M'(z')$ .

- a. Déterminer l'écriture complexe de  $z$
- b. Déterminer l'affixe du point  $E$  tel que  $r(E) = F$
- c. Déterminer l'écriture analytique de  $r$
- d. Déterminer l'équation du cercle  $(C')$ , image de  $(C)$ , de centre  $E$  et de rayon 3 cm par  $r$
1. Soit  $T$  la transformation du plan qui à à tout point  $M(z)$  associe le point  $M'(z')$  tel que  $z' = az + b$  avec  $a \in \mathbb{C}^*$  et  $b \in \mathbb{C}$ 
  - a. Déterminer  $a$  et  $b$  sachant que  $T$  laisse invariant  $I$  et transforme  $B$  en  $O$
  - b. Montrer que  $z' - z_I = (1 - i)(z - z_I)$
  - c. En déduire que  $IM' = \sqrt{2}IM$  et  $(\vec{IM}; \vec{IM'}) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$
  - d. Déduire de c) la nature de  $T$  et préciser ses éléments caractéristiques
2. Soit  $S = T \circ r$ . Soient  $M(z)$  et  $M'(z')$  tel que  $S(M) = M'$ 
  - a. Montrer que  $z' = \sqrt{2}z + 1 + i(3 - \sqrt{2})$
  - b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de  $S$

**EXERCICE : 8**

Soit  $S$  la transformation du plan complexe, d'écriture  $z' = (1 + i)z + 2i$ .  $A$  le point d'affixe  $-2$  et  $B$  celui d'affixe  $-1$

**Partie A**

- 1) Donner la nature et les éléments caractéristiques de  $S$
- 2) Donner l'affixe du point  $C$  image de  $B$  par  $S$
- 3) En déduire la nature du triangle  $ABC$

**Partie B** Soit la suite  $(z_n)$  définie par 
$$\begin{cases} z_0 = -1 \\ z_{n+1} = (1 + i)z_n + 2i \end{cases}$$

- 1) Calculer  $z_1$  et  $z_2$
  - 2) On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = z_n + 2$ 
    - a) Montrer que  $(u_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme
    - b) En déduire l'expression de  $z_n$  en fonction de  $n$ .
  - 3) Soit  $M_n$  le point d'affixe  $z_n$ 
    - a) Construire les points  $M_n$  pour  $n$  variant de 0 à 8
    - b) Pour quelles valeurs de  $n$  les points  $M_n$  sont-ils à l'intérieur du cercle de centre  $A$  et de rayon 5 ?
- Démontrer que  $\frac{z_{n+1}+2}{z_n+2} = 1 + i$ . En déduire la nature du triangle  $AM_nM_{n+1}$ .