

Série n°5 : Suites numériques (TS2)**EXERCICE :1**

Soit la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4} \end{cases}$$

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; 0 \leq u_n \leq 1$
- 2) Montrer que (u_n) est croissante
- 3) (u_n) est-elle convergente ? justifier
- 4) Soit (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$
 - a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique convergente
 - b) Exprimer u_n en fonction de n puis en déduire la limite de (u_n)

EXERCICE : 2

Soit la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{20 + u_n} \end{cases}$$

- 1) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \ 0 \leq u_n \leq 5$
- 2) Etudier le sens de variation de (u_n)
- 3) En déduire que (u_n) converge vers un réel à déterminer.
- 4) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \ |u_{n+1} - 5| \leq \frac{1}{5} |u_n - 5|$
- 5) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \ |u_n - 5| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n |u_0 - 5|$
- 6) Retrouver les résultats du 3)

EXERCICE : 3

On considère la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{3}n - \frac{1}{2} \end{cases}$$

- 1) calculer u_1, u_2
- 2) Soit (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 2u_n + n$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- 3) Exprimer u_n en fonction de n puis préciser sa limite en $+\infty$
- 4) Calculer $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ en fonction de n puis déterminer sa limite en $+\infty$

EXERCICE : 4

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel non nul n par

$$\begin{cases} u_1 = 12 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

- 1) $w_n = v_n - u_n$ pour tout n non nul. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique convergente.
- 2) Exprimer w_n en fonction de n .
- 3) Démontrer que (u_n) décroissante et (v_n) croissante.
- 4) Démontrer que pour tout entier non nul n , $u_n \geq v_n$ et en déduire que $v_1 \leq v_n \leq u_n \leq u_1$
- 5) Conclure
- 6) $T_n = 3u_n + 8v_n$ avec n entier naturel non nul. Montrer que (T_n) est une suite constante puis déterminer les limites de (u_n) et (v_n)

EXERCICE : 5

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}$

- 1) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α sur $[0; +\infty[$ puis vérifier que $\alpha \in]0,6; 0,7[$
- 2) Montrer que $\forall x \in [0; 1] \mid f'(x) \mid \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$
- 3) Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
 - a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; 0 \leq u_n \leq 1$.
 - b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \mid u_{n+1} - \alpha \mid \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \mid u_n - \alpha \mid$.
 - c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \mid u_n - \alpha \mid \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n \mid u_0 - \alpha \mid$ puis (u_n) converge vers $\sqrt{\sqrt{2}} - 1$.

EXERCICE : 6

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \cos \theta \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

- 1) Calculer les trois premiers termes de la suite en fonction de θ
(On rappelle que $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$)
- 2) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}; u_n = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$
- 3) Soit (v_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}; v_n = \frac{\theta}{2^n}$. déterminer la limite de la suite (v_n)
- 4) En déduire que la suite (u_n) est convergente ; quelle est sa limite ?

EXERCICE : 7

Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1; U_1 = 3 \\ U_{n+2} = \frac{1}{2}a^2 U_{n+1} + (a-3)U_n \end{cases}, n \in \mathbb{N} \text{ et } a \in \mathbb{R}$ et la suite (V_n) définie par

$$V_n = U_{n+1} - U_n$$

1) On pose $a = 2$

- Vérifier que (V_n) est constante
- En déduire que (U_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme. Exprimer U_n et $S_n = \sum_{i=0}^n U_i$ en fonction de n .

c) En déduire la somme des entiers naturels impaires inférieure à 100

2) On pose $a = -4$

- Vérifier que (V_n) est une suite géométrique puis exprimer en fonction de n , V_n et la somme $S'_n = \sum_{i=0}^n V_i$
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, S'_n = U_{n+1} - 1$. Montrer que (U_n) est divergente

EXERCICE : 8

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les suites définies par : $\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n + 3V_n}{5} \end{cases}; \begin{cases} V_1 = 7 \\ V_{n+1} = \frac{U_n + 4V_n}{5} \end{cases}$

- Calculer les termes U_2, V_2, U_3 et V_3
- Soit la suite $W_n = V_n - U_n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
 - Démontrer que (W_n) est géométrique puis en déduire le signe de W_n
 - Exprimer W_n en fonction de n . Déterminer la limite de (W_n) .
- Démontrer que (V_n) est décroissante et (U_n) est croissante.
- En déduire que (U_n) est majorée et que (V_n) est minorée.
- Justifier que les suites $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes
- Soit la suite (t_n) définie par $t_n = \frac{1}{3}U_n + V_n$ pour tout entier naturel n non nul.
 - Démontrer que (t_n) est une suite constante.
 - En déduire la limite des suites (U_n) et (V_n) .

EXERCICE : 9

- 1) Les réels θ_1, θ_2 et θ_3 sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{3}$. Calculer θ_2 et θ_3 en fonction de θ_1 .
- 2) Sachant que r_1, r_2 , et r_3 sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, calculer r_2 , et r_3 en fonction de r_1 .
- 3) On note z_i le nombre complexe de module r_i et dont un argument est θ_i avec $i \in \{1; 2; 3\}$.
 - a) Calculer le module de $z_1 \times z_2 \times z_3$ en fonction de r_1 .
 - b) Déterminer un argument de $z_1 \times z_2 \times z_3$ en fonction de θ_1 .
 - c) On suppose que $\theta_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ et $z_1 \times z_2 \times z_3 = 8i$. Déterminer θ_1 et r_1 .
 - d) En déduire sous forme trigonométrique et sous forme algébrique les nombres complexes z_1, z_2 et z_3 .

EXERCICE : 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On prendra comme unité graphique 1cm.

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par : $\begin{cases} z_0 = 2i \\ z_{n+1} = (1+i)z_n - 2i \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}$, ainsi que les

points $M_n(z_n)$. On pose $Z_n = z_n - 2$.

1. Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 ainsi que la ligne brisée $M_0M_1M_2M_3M_4$.
2. Montrer que (Z_n) est une suite géométrique.
3. Exprimer Z_n puis z_n en fonction de n . Pour quelles valeurs de n z_n est-il un réel ?
4. Montrer que $M_n M_{n+1} = (\sqrt{2})^{3+n}$. En déduire l'expression de $L_n = \sum_{K=0}^n M_K M_{K+1}$ en fonction de n .
5. Déterminer n pour la longueur de la ligne brisée $M_0M_1 + M_1M_2 + M_2M_3 + \dots + M_nM_{n+1}$ dépasse 100.